

当前股指期货市场价格波动限制的研究与 改革建议

张海、王智力、傅小燕、陈誉

摘 要

本文主要研究了国内股指期货市场的涨跌幅限制。首先通过对国外价格波动限制的研究，寻找对于国内的启发；不过本文的重点还是通过研究国内股指期货的特征，来分析涨跌停板的合理性，这部分的实证研究主要从期货现货市场涨跌停板匹配程度、股指期货市场波动性的考量以及涨跌停的设置和保证金适应这三个方面入手，分别利用了波动模型、GARCH-VAR 估计模型、极值模型进行实证分析；根据实证研究得出的结论，我们建议可以适当缩小涨跌停板的幅度，并且给出了涨跌停板的设置和保证金合理配合的建议。

一、引言

涨跌幅限制、熔断机制与减速措施是国际通用的稳定股指期货价格的三大机制，本文主要研究国内股指期货市场的涨跌幅限制。

纵观国内股指期货市场的表现，从推出至今，都没有触及涨跌停板，国内涨跌停板的幅度是否合理呢？一般的研究都是从期货现货市场涨跌停板匹配程度、股指期货市场波动性考量两个方面出发，来研究涨跌停板设置的合理与否。不过在国内涨跌停的设置和保证金的比例也有千丝万缕的联系，所以我们将文章中主要从以上三方面进行系统性的研究分析。在分析国内市场的涨跌停板制度之前，我们还需要好好研究下国外市场的价格波动限制。

二、价格波动限制机制的国内外比较分析

（一）国外价格波动限制的借鉴

国外成熟市场大多实行了涨跌幅限制，同时有其他价格稳定措施，例如美国、法国和新加坡都设有熔断机制，目前稳居全球股指期货交易量前列的韩国 KOSPI200 指数期货更是全方位的设置了选择性熔断与强制性熔断。

表 1 境内外主要股指期货市场涨跌幅限制

国家和地区	交易所	交易品种	涨跌幅限制的一般规定	有无其他价格稳定措施
美国	芝加哥商业交易所	S&P 500 指数期货	仅对下跌有限制，分四段设置跌停限制，盘中交易价格较上一交易日结算价下跌分别达 5%、10%、15%、20% 的四个幅度时，跌停限制启动，但每段还可以在跌停价位之上进行 10 分钟交易，10 分钟后如果无法打开跌停则进入到下一段限制中	有，仅在下跌情形中，当价格触及每段的涨停限制且在规定时间内未能打开，则启动熔断机制，与跌幅限制相应的分段启动，每次 2 分钟
英国	英国伦敦金融期货及期权交易所	FTSE 100 指数期货	无	做市商制度
法国	巴黎交易所	CAC 40 指数期货	上一个交易日结算价基础上 ± 375 个指数点	有，熔断制度，当权重占比达总市值 75% 以上的股票触及当日价格限制时启动
韩国	韩国期交所	KOSPI 200 指数期货	上一个交易日收盘价的 $\pm 10\%$	有，强制性熔断和选择性熔断相配合
中国香港	香港期交所	恒生指数期货	无	证券庄家制度
中国内地	中国金融期货交易所	沪深 300 指数期货	上一个交易日结算价的 $\pm 10\%$	无

资料来源：各国证券和金融期货交易所官方网站

在实施涨跌幅限制方面，国外成熟市场存在一定国别差异，主要表现为：

1、从实施涨跌幅限制的方式来看，可以分为以法国、韩国、日本为代表的每日单一涨跌幅限制和以美国 S&P500、新加坡 A50 股指期货为代表的分段涨跌幅限制。

2、从对涨跌幅限制的具体规定价格来看，可以分为以法国

为代表的“绝对值”法和以美国、韩国为代表的“相对百分比”法。

3、涨跌停板制度不是固定不变的，它会随着市场的成熟而逐渐提高。例如韩国 KOSPI200 指数期货推出初期为 5%，1998 年 3 月提高到 7%，1998 年 12 月提高到 10%。

当然，还有少数市场采用其他措施来代替涨跌幅限制，如英国既没有涨跌幅限制，也没有熔断机制，而是采用做市商制度。而中国香港则是采用证券庄家制度。

此外，价格稳定措施还包括熔断制度，它起源于美国，是 1987 年股灾的产物之一。熔断机制是启动涨跌停板制度前的缓冲手段，发挥防护栏的作用。即在每日开盘之后，当某一合约申报价触及熔断价格并且持续一分钟，则对该合约启动熔断机制。

总而言之，各国出台价格波动限制的原则基于保证市场安全性和保持其流动性的综合考虑，相较于国外成熟市场，我国股指期货才刚起步，还有很长一段路需要我们摸索前进。

(二) 国内价格波动限制的现状

一般来说，涨跌停板的设置主要考虑两个因素，一是与现货市场是否有涨跌停板相适应，二是标的指数的市场波动性。2010 年 4 月，中国金融期货交易所推出的沪深 300 股指期货，主要依靠涨跌停板制度来进行价格波动限制。

中金所在《股指期货交易规则》中把每日涨跌停板定为上一交易日结算价的 $\pm 10\%$ ，上一交易日结算价是指股指期货合约上

一交易日最后一小时成交价格按照成交量的加权平均价。我们发现，±10%的涨跌停板与股票现货市场保持了一致，这也是中金所当初设置涨跌停板的主要依据。

另外，考虑到国内期货市场的实际情况，涨跌停板的设置还必须考虑第三个因素，即涨跌停板是否与保证金水平相匹配。

目前我国股指期货交易的保证金比例最低为12%，投资者可以控制8倍于所投资金额的合约资产。在收益可能成倍放大的同时，投资者随之承担的损失也是成倍放大的。如果交易者重仓操作，那么其保证金就将不足以弥补损失，并且期货公司会因为没有足够的时间要求客户追加保证金或采取强行平仓措施而受到牵连。此时涨跌停版就不能起到降低违约风险的作用。所以，我们谨慎的提出股指期货10%的涨跌停板与目前12%-15%的保证金比例并不匹配，不利于股指期货的风险管理，应进行适当调整。

三、国内股指期货合约涨跌停板设置的实证研究

(一) 期货市场和现货市场涨跌停板的匹配程度

在分析股指期货与现货市场涨跌停板时，我们分别从期现货市场价格波动程度是否匹配、事后反应是否匹配方面进行讨论。

1、期现货市场波动情况分析

我们选择自股指期货上市之后的数据为例，即2010年4月16日~2012年3月19日的收盘价，数据长度为466，采用统计方法进行分析。

在大多数时间里，我国股指期货与现货价格日波动绝对范围

都在 10%以内，处于下方空间的概率要稍微大些，而上方波动范围较窄，超过 5%的机会很少。平均一下，期货价格日波动均值为 1.10%，波动区间为【0.0038%，5.82%】，现货价格日波动均值为 1.19%，波动区间为【0.0079%，5.34%】。因此，尽管现货价格波动均值较期货大，但是其价格波动区间却比期货价格波动区间要窄，由此可见，期货价格波动比现货价格要剧烈，投资者承受的风险也较大。但由于两者具有很强的相关性，所以在期货价格发出反映或者现货价格发生异常波动时，各自都会很自觉的跟随，两个市场的波动差距大都在 1%上下浮动。

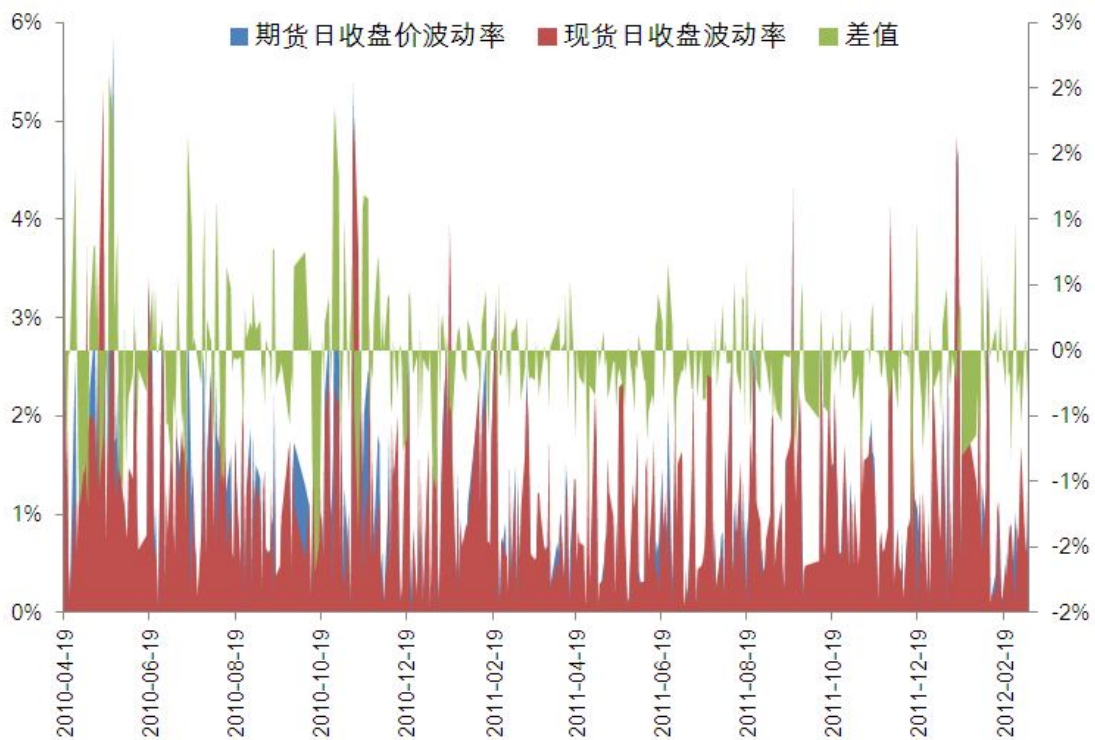


图 1 期现货价格日波动走势情况

数据来源：中国金融期货交易所

2、“利多”和“利空”消息分别在期现货市场中的反映

在期现货市场中，经常可以发现这样的现象：在波动异常阶段，价格向下运动幅度往往比向上幅度要大（在这里我们定义波

动幅度大于 5%即为异常波动)。股指期货上市的近 2 年的时间当中，波动幅度超过 5%的天数总共是 4 次（期现货加总），其中期货 2 次，现货 2 次，价格下跌时跌幅均在 6%左右，而上涨时价格涨幅均在 1%左右。

表 2 异常情况下期现货市场波动与涨跌

日期	期货		现货	
	波动	涨跌	波动	涨跌
2010 年 5 月 17 日	4.72%	-4.78%	5.34%	-5.49%
2010 年 5 月 21 日	5.83%	0.50%	4.10%	1.56%
2010 年 11 月 11 日	5.44%	0.84%	4.75%	0.31%
2010 年 11 月 12 日	4.57%	-6.86%	5.03%	-6.42%

数据来源：中国金融期货交易所

上述表明，期现货市场对于市场利空消息的反应均表现出恐慌的情绪，所以跌幅都放大，对于利多消息的反应表现出看涨的情绪，但情绪不是特别浓厚。这种现象在资本市场中被称为“非对称效应”，也即期现货市场对于好消息和坏消息的反映程度或者反映结果是不同的，表现为一条非对称曲线。我们应用非对称的 TGARCH 以及 EGARCH 模型进行期现货市场波动影响联动性分析。

(1) TGARCH 模型

$$\text{均值方程: } Q_h = -0.000201 + 0.039688Q_h^{-1} + 0.922877X_h$$

$$\text{方差方程: } \hat{\sigma}_t^2 = 1.39 \times 10^{-6} + 0.056\hat{\mu}_{t-1}^2 + 0.099\hat{\mu}_{t-1}^2 d_{t-1} + 0.8277\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

其中 $R^2 = 0.90$ ，对数似然值为 1877.605， $AIC = -8.06$, $SC = -8$

(2) EGARCH 模型

$$\text{均值方程: } Q_h' = -0.000279 + 0.036534Q_h^{-1} + 0.9253X_h'$$

$$\text{方差方程: } \hat{\sigma}_t^2 = -0.9840 + 0.2134 \left| \frac{\hat{\mu}_{t-1}}{\hat{\sigma}_{t-1}} \right| - 0.09437 \left(\frac{\hat{\mu}_{t-1}}{\hat{\sigma}_{t-1}} \right) + 0.9241 \ln(\hat{\sigma}_{t-1}^2)$$

其中 $R^2 = 0.90$, 对数似然值为 1876.438, $AIC = -8.06$, $SC = -8$

在 TGARCH 模型中, 杠杆效应系数为 0.099, 说明期货价格的波动具有“杠杆效应”: “利空”消息比等量的“利好消息”产生更大的波动。当出现利好消息时, $\mu_{t-1} > 0$, 则 $\sigma_{t-1} = 0$, 所以该冲击只会对期货价格带来 0.056 倍的冲击; 而出现利空消息时, $\mu_{t-1} < 0, \sigma_{t-1} = 1$, 则会对期货价格带来 0.155 倍的冲击。这些消息在影响期货市场的同时也在冲击现货市场, 根据两者之间的相关系数, 我们可以知道, 利空与利多消息会现货价格产生的冲击分别为 0.051、0.143。这个结果在 EGARCH 模型中也得到充分的体现。其中 $\alpha = 0.2134$, $\gamma = -0.094$ 。当 $\mu_{t-1} > 0$, 该信息冲击对条件方差的对数有一个 0.119 倍的冲击; $\mu_{t-1} < 0$ 时, 它给条件方差的对数带来的冲击大小为 0.3074 倍的冲击。在建立信息冲击曲线方程之后, 我们得出四次波动较大时信息期货对现货的影响和现货对期货的影响分别为:

表 3 消息发生后, 期现货市场互相反映的程度

日期	期货对现货	现货对期货
2010年5月17日	-3.39	-2.34
2010年5月24日	-0.94	-1.45
2010年11月11日	-0.69	-1.67
2010年11月12日	-1.03	-1.15

数据来源: 中国金融期货交易所

由此可见, 这种消息的杠杆效应对期货市场影响较大, 说明期货市场容易受到外界因素的刺激而发生较大的波动。当现货市

场也设置涨跌停板时，期货市场的涨跌停板应该稍大于现货市场的涨跌停板，但从期货价格在异常情况下的波动来看，要远远小于交易所给出的涨跌停板。

(二) 沪深 300 股指期货市场波动性的实证研究

1、描述性统计分析

首先，我们利用股指期货的对数收益率，表达式为： $R_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ 。其中 P_t 表示当日股指期货收盘价， P_{t-1} 表示前日收盘价。

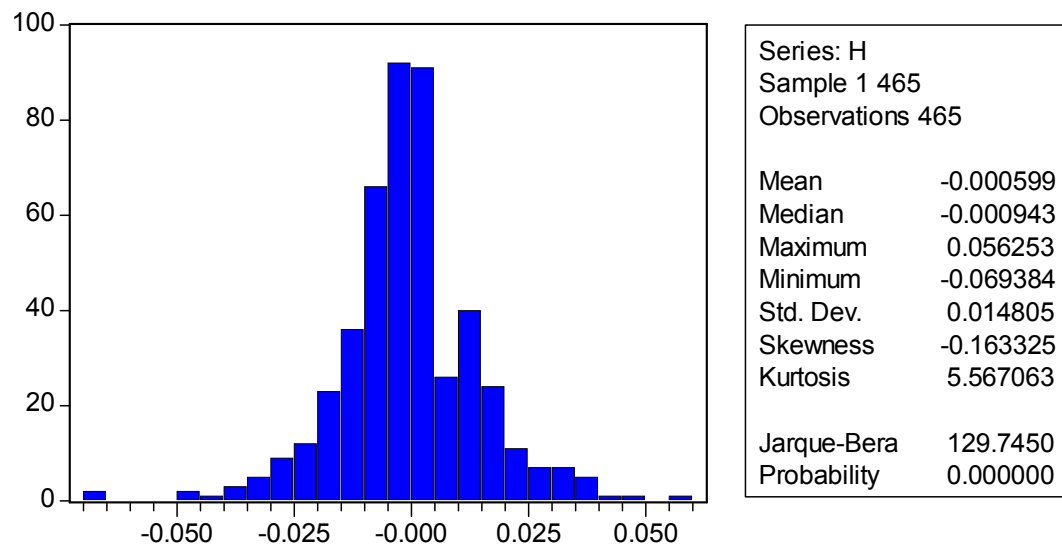


图 2 描述性统计分析

数据来源：中国金融期货交易所

从统计中，我们发现样本的偏度为-0.163325，峰度为 5.567063，表现出“尖峰厚尾”的特征，而且 J-B 统计量的值为 129.745，大于临界值，可以认为股指期货收益率序列不符合正态分布。

2、GARCH 模型的建立

接着我们对股指收益率序列进行平稳性检验，在 ADF 单位根检验中， R_t 的 ADF 统计量为-21.92，绝对值均大于 1%、5%、

10%的水平，因此可以判定 R_t 是平稳的。另外从图中，我们可以看到股指收益率序列有一定的聚集效应，所以我们尝试建立 GARCH 模型。

根据 AIC 和 SC 准则计算结果，我们选取 GARCH (1, 1) 模型进行估计，得到条件均值方程和条件方差方程分别为：

$$R_t = -0.000376 + \varepsilon_t; h_t^2 = 0.00000877 + 0.01784\varepsilon_{t-1}^2 + 0.934h_{t-1}^2;$$

条件方差方程中，Z 统计量非常显著，其对应的概率值 P 非常小，说明这些参数估计值都是显著的，而且这些参数估计值都大于 0，从而保证条件方差的非负数要求，符合 GARCH 模型参数要求。ARCH 项和 GARCH 项的系数估计值分别为 0.01784 和 0.934，其和小于 1 满足 GARCH 模型参数要求。ARCH 效应的检验统计量是 0.087262，P 值为 0.7678，远大于显著性水平。因此接受残差不存在 ARCH 效应的原假设，即可以认为所得到的残差序列不存在自相关和异方差，因此可以用该 GARCH 模型进行实证分析。

3、基于 GARCH-VAR 模型的 VAR 值

这里我们引入 VAR 的概念，VAR 也叫在险值，意为处在风险中的价值。定义为：在一定的持有期，一定的置信水平下可能的最大损失。也就是说：在给定时期，有 X% 的可能性最大的损失是多少（详细数学定义见附录）

VAR 计算方法很多，其中应用较多的是方差-协方差方法，本文考虑到金融工具价格的波动聚集性以及尖峰厚尾性，采取基于

GARCH-VAR 模型来估计 VAR 值。我们将 GARCH 模型中估计的条件方差 h_t 代入 VAR 的计算公式，得到：

$$VAR_t = -\alpha \sqrt{h_t} P_{t-1}, t=1, 2, \dots, n$$

其中 P_{t-1} 为 $t-1$ 时刻某金融工具的价格， α 为给定置信水平下对应的标准正态分布的分位点； $\sqrt{h_t}$ 为此金融工具价格的时间序列分布的条件标准差。

表 4 基于 GARCH-VAR 模型的 VAR 损失值

置信度 (%)	平均 VAR 损失 (元)	最大 VAR 损失 (元)	实际损失高于 VAR 的时间 (天)	实际损失高于 VAR 的比例 (%)
95%	-71.41	-216.36	22	4.73
99%	-101.64	-305.53	6	0.14

数据来源：中国金融期货交易所

根据表中的数据，我们可以得到：

(1) 在置信度 95% 下，根据 GRACH-VAR 模型估计平均 VAR 损失为 71.41 元，最大 VAR 损失为 216.36，实际损失高于 VAR 的时间有 22 天，占 4.73%；而在置信度 99% 下，平均 VAR 损失为 101.64 元，最大 VAR 损失为 305.53，实际损失高于 VAR 的时间只有 6 天，占 0.14%。

(2) 给定的置信区间越高，基于 GRACH-VAR 模型估计的股指期货风险更加有效，而在置信度为 99% 时，股指期货的几乎所有波动风险都能被 VAR 估计值所覆盖，而这在一定程度上能够成为股指期货涨跌停板制定的参考。

(三) 涨跌停板的设置和保证金适应的实证研究

1、保证金和价格波动数量界限分析

反映期货价格波动的价格数据主要涉及开盘价、收盘价、最高价、最低价，反映日内价格极端波动水平的可以用最高价与最低价来衡量，反映日内价格极端波动水平的可以用最高价与最低价来衡量，反映日间价格波动的可以用开盘价与收盘价来衡量。因此我们分别统计了日内、日间价格极端波动概率情况以及极端波动条件下保证金水平的穿仓风险。

表 5 穿仓概率

时间	连续两日	连续三日	连续四日
穿仓风险	0.43%	0	0

数据来源：中国金融期货交易所

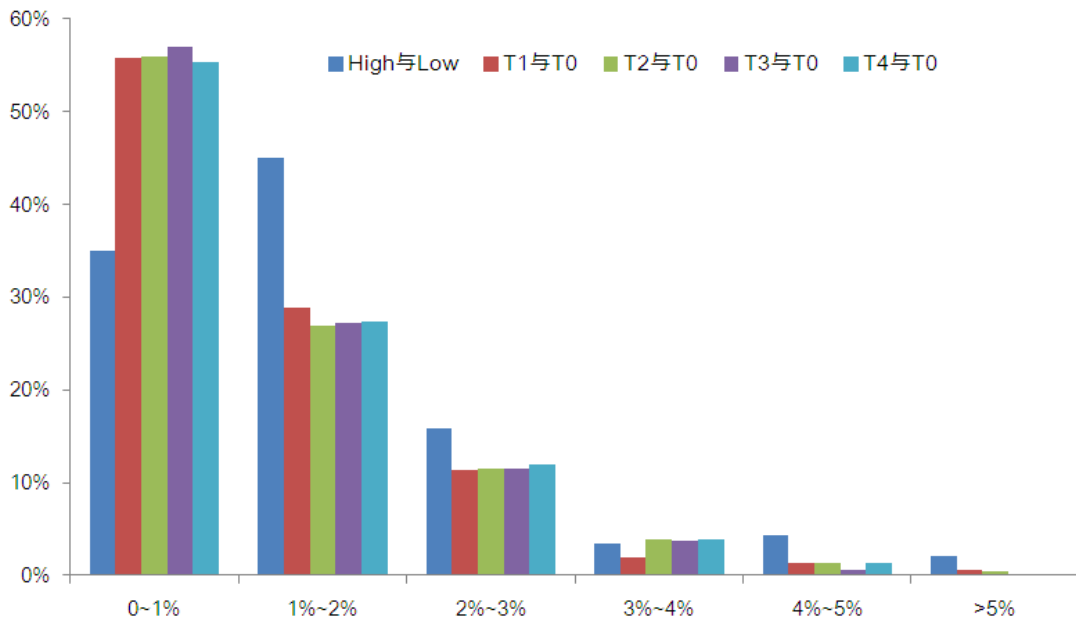


图 3 当日、隔日、次日等的价格波动

资料来源：中国金融期货交易所

(其中 High 与 Low 表示最高价与最低价之间波动比重、T1 与 T0 表示第一天收盘价与首日收盘价之间波动比重、T2 与 T0 表示第三天与首日价格波动比重、T3 与 T0 表示第四天与首日价格波动比重、T4 与 T0 表示第五天与首日价格波动比重)

2、股指期货收益率极值分布尾部参数估计

由上面的研究，我们发现股指期货呈现厚尾的特征，而极值理论正是基于评估厚尾分布事件风险或极端事件风险的工具，在此背景下，我们应用广义帕累托分布下的估计值作为设定商品期货保证金水平的依据，（具体理论可参见附件）估计出期货收益率分布的尾部参数后，可以估计出分布的百分位数，即期货部位所应要求的保证金比例。

通过对各自序列进行进行无数次的模拟，我们得到（最高价-最低价）/开盘价序列日内波动最大值为 7%，而到了 5%左右时，该超额均值函数为接近水平线，即 $\mu = 0.05$ 时， $e(\mu)$ 呈现一条水平线。同理，当我们应用（最高价-收盘价）/开盘价来进行模拟时，假设各种阈值的取值范围，我们计算出各种相对应的情况，此时就可以得到它的一条曲线，而在此时其日内波动最大值为 5.78%，而到了 5%左右时， $e(\mu)$ 也呈现一条直线状态，即阈值 $\mu = 0.05$ 。

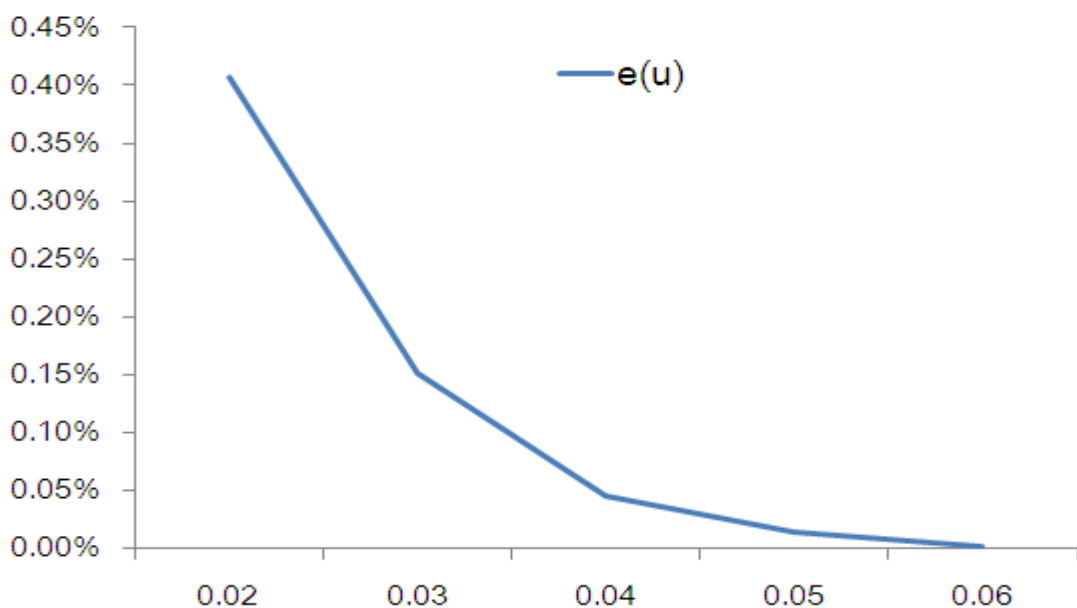


图 4 （最高价-最低价）/开盘价情况下的阈值 数据来源：中国金融期货交易所

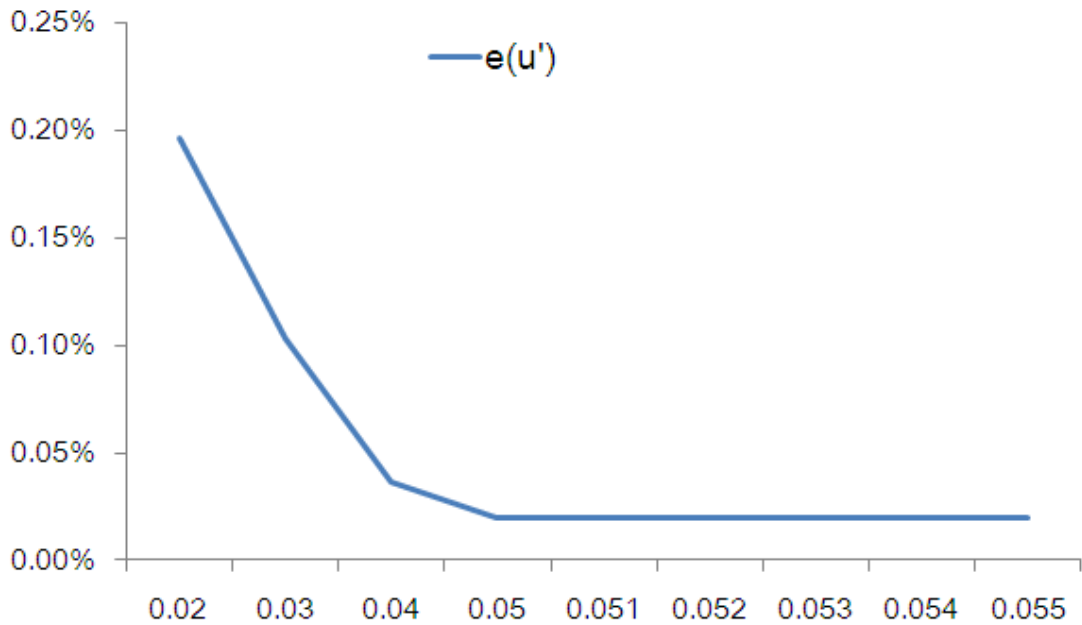


图 5 (最高价-收盘价) / 开盘价情况下的阈值 数据来源: 中国金融期货交易所

在确定了阈值之后, 我们应用极大似然估计法来计算形态参数 ξ 以及尺度参数 σ 。

表 6 极值理论中各大参数

	(high-low) / open	(high-close) / open
μ	0.05	0.05
m	7	2
m/n	0.015	0.00429
ξ	1.452591	2.1972
a	0.6896	0.4566

数据来源: 中国金融期货交易所

其中 μ 为阈值, m 为超过阈值的数据个数, n 为样本数据, ξ 为形态参数, a ($1/\xi$) 为尾部参数。

因为 $\xi > 0$, 所以该极值分布是服从 Frechet 分布。在前人的研究当中, Lead better(1983)指出具有厚尾性质的 Frechet 极值分

布其百分位数 R_{1-p} 的估计式，则在给定的期货空头头寸做要求的保证金比例之下，期货日价格极端情况下超过阈值水平个数 m 使得期货空头头寸保证金不足的概率为：

$$\hat{p}(R_{1-p}) = \left(\frac{m}{n}\right) \left(\frac{R_m}{R_{1-p}}\right)^a$$

其中 R_m 为超过阈值的价格日收益率， R_{1-p} 为给定的期货空头头寸保证金比例。

表 7 保证金一定水平下的违约概率

单位：%

保证金比例	(high-low) / open 违约概率	(high-close) / open 违约概率
10	0.088	0.016
8	0.097	0.019
6	0.111	0.023
5	0.120	0.026
4	0.133	0.031

数据来源：中国金融期货交易所

从上述保证金收取上来看，不同的极值条件，在相同的保证金比例下，其违约概率不同。不论是从最高价与最低价还是最高价与收盘价相比较，两者在 4% 以上的保证金收取比例上的违约风险都较小。其中当保证金比例达到交易所规定的 10% 时，违约风险已经降至 0.1% 以下，可以忽略不计。

四、对于国内价格波动限制调整的建议

(一) 适当缩小涨跌停限制的建议

基于对期货市场和现货市场涨跌停板的匹配程度研究，我们发现期货市场与现货市场相互影响，但总体而言，期货市场容易受到外界因素的刺激而发生较大的波动，现货方面相对较小。虽

然交易所将期货和现货的涨跌停板设置为相同的初衷是为了协调期货和现货的统一性，但是研究告诉我们期货市场的涨跌停板要稍大于现货市场的涨跌停板，市场才能更有效，不过从期货价格在异常情况下的波动来看，要远远小于交易所给出的涨跌停板，因此，我们在建议给出不同的涨跌停板之外，还需要将涨跌停板的幅度进行调整。

为此，在对于股指期货波动性的实证研究中，我们利用GARCH-VAR的估计方法对股指期货的波动进行度量，最后我们得到在95%置信度的情况下，7%的涨跌停板基本上能覆盖所有的风险，而在99%置信度的情况下，9%的涨跌停板就基本上能覆盖所有的风险。所以，我们认为涨跌停板的幅度可以适当缩小，使得其作用更有效。

(二) 涨跌停板的设置和保证金合理配合的建议

股指期货上市以来没有出现过涨跌停的现象，但是在期现货价格涨跌幅较大的情况之下，也即在极端情况下，期货部位的预期保证金不足的概率较低，也就是说违约概率较低。当在违约概率差距较小、涨跌幅较大的情况之下，所需要的保证金就越高，预期部分所需的保证金不足机率就越低。两者有异曲同工之效。

同样的，期货市场的保证金与涨跌幅限制有相互影响相互监督的作用。当前我国股指期货保证金水平设置是根据合约价值的12%来计算的，在此情况之下并不能很好的说明此保证金设置的合理。所以借鉴上述统计结果，交易所是否可以考虑极端情况之

下保证金水平，即期货价格波动越大，保证金设置要求就高。目前股指期货上市之后数据还很少，因此再运行较长时间之后，可以统计出具有说服意义的股指期货价格波动，从而据此设置更加合理的保证金，当前来看，此价格波动下的保证金收取相对较高，可以适当缩小，参考第一条建议。

参考文献

【1】李江、林小春：我国股指期货与现货市场之间价格发现与波动性关系研究，《中国市场》，2010年第48期

【2】徐国祥：期货市场保证金和涨跌停板数量界限及实证研究，Statistical Research，1999年第五版

【3】唐元惠、陈旭光：估值期货涨跌幅限制的国内外比较与研究，东北财经大学学报，2011年第3期

【4】韦艳华、张世英、郭焱：金融市场相关程度与相关模式的研究[J].系统工程报.2004,19(4):(355-362)

【5】房振明、王春峰、曹媛媛：上海证券市场流动性模型的研究[J].管理工程学报，2005, 19: 33- 39

【6】Chou, W. L, Fan, K. K.Lee, C. F. Hedging with the Nikkei index futures: The conventional model versus the error correction model[J]. Quarterly Review of Economics and Finance, 1993,36: (495—505)

【7】David D. Cho, Jeffrey Russell, George C. Tiao, Ruey Tsay .The magnet effect of price limits: evidence from high-frequency data on Taiwan Stock Exchange. Journal of Empirical Finance 10 (2003) 133—168

【8】Soon Huat Chan, Kenneth A. Kim, S. Ghon Rhee .Price limit performance: evidence from transactions data and the limit order book. Journal of Empirical Finance (2004)

【9】 Yulia V. Veld-Merkoulova . Price limits in futures markets: effects on the price discovery process and volatility. *International Review of Financial Analysis*12 (2003) 311–328

附录:

(1) VAR 其数学定义如下: 设 R 是描述组合收益的随机变量, $f(R)$ 是其概率密度函数, 置信水平是 c , 那么收益小于 R^* 的概率为

$$\text{Prob}[R < R^*] = \int_{-\infty}^{R^*} f(R) dR = c$$

(2) 尾部参数分布

定义 1: 假设序列 $\{z_i\}$ 的分布函数为 $F(x)$, 定义 $F_u(y)$ 为随机变量 Z 超过阈值 u 的条件分布函数, 它可以表示为:

$$F_u(y) = P(Z - u \leq y | Z > u) \quad y \geq 0 \quad (1)$$

根据条件概率公式我们可以得到:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(z) - F(u)}{1 - F(u)} \Rightarrow F(z) = F_u(y)(1 - F(u)) + F(u), \quad z \geq u \quad (2)$$

定理 1: (Pickands (1975)): 对于一大类分布 F (几乎包括所有的常用分布) $y \in [0, -\sigma/\xi]$

超限分布函数 $F_u(y)$, 存在一个 $G'_{\xi, \sigma}(y)$ 使得:

$$F_u(y) \approx G'_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma} y)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma} & \xi = 0 \end{cases} \quad u \rightarrow \infty \quad (3)$$

当 $\xi \geq 0$ 时, $y \in [0, \infty)$; 当 $\xi < 0$ 时, $y \in [0, -\sigma/\xi]$ 。函数 $G'_{\xi, \sigma}(y)$ 称广义帕累托分布, 也即其概率密度函数。

(3) 阈值的确定

一般有两种: 根据 Hill 图、根据样本的超限期望图, 本文采用样本的超限期望图确定阈值 u , 令 $X_{(1)} > X_{(2)} > \dots > X_{(n)}$, 样本的超限期望函数定义为:

$$e(u) = \frac{\sum_{i=k}^n (X_i - u)}{n - k - 1} \quad k = \min\{i | X_i > u\} \quad (4)$$

超限期望图为点 $(u, e(u))$ 构成的曲线, 选取充分大的 u 作为阈值, 使得当 $x \geq u$ 时 $e(x)$ 为近似线性函数:

$$e(m) = E(X - m | X > m) = \frac{\sigma + \xi m}{1 + \xi} \quad \sigma + \xi m > 0 \quad (5)$$

(4) 极大似然估计

当 u 确定以后, 利用 $\{z_i\}$ 的值, 进行最大似然估计得到 $\hat{\xi}$ 和 $\hat{\sigma}$ 。同时, 我们得到 $\{z_i\}$ 的值中

比阈值 u 大的个数，记为 N_u ，根据公式 (5) 用频率代替 $F(u)$ 的值，可以得到 $F(z)$ 的表达式：

$$F(z) = F_u(y)(1 - F(u)) + F(u) = \begin{cases} \frac{N_u}{N} (1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma}(z-u))^{-1/\xi}) + (1 - \frac{N_u}{N}) \\ \frac{N_u}{N} (1 - e^{-(z-u)/\sigma}) + (1 - \frac{N_u}{N}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{N_u}{N} (1 + \frac{\xi}{\sigma}(z-u))^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \frac{N_u}{N} e^{-(z-u)/\sigma} & \xi = 0 \end{cases}$$

(5) 上述分布必然服从于下面三种形式之一：

Gumbel 分布： $\Delta(x) = \exp(-e^{-x})$ ， $-\infty < x < \infty$

Weibull 分布： $\phi(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \exp(-x^{-a}), x > 0 \end{cases} a > 0$

Fre'chet 分布： $\varphi(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ \exp(-x^{-a}), x \leq 0 \end{cases} a > 0$

上述三种极值分布形式可以归结为如下统一形式的 GEV 分布

$$F(x) = \begin{cases} \exp\{- (1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-1/\xi}\}, \text{if } \xi \neq 0, 1 + \xi(x-\mu)/\sigma > 0 \\ \exp(-e^x), \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

其中 ξ 是形状参数， μ 和 σ 分别是位置和尺度参数，一般将 $a = 1/\xi$ 称为分布的尾部指数，

其取值决定了极值分布的类型， $\xi = 0$ 时是 Gumbel 分布， $\xi > 0$ 时是 Frechet 分布， $\xi < 0$

时是 Weibull 分布。